А. Ш. ШАЛДАНБАЕВ, С. М. ШАЛЕНОВА

(Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Республика Казахстан)

О БАЗИСНОСТИ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С КРАТНЫМ СПЕКТРОМ

Аннотация

В настоящей работе, с помощью признака В. А. Ильина, установлена базисность собственных и присо-единенных векторов оператора Штурма-Лиувилля с кратным спектром.

Ключевые слова: оператор Штурма-Лиувилля, собственные функций, присоединенные функций.

Кілт сөздер: Штурма-Лиувилл операторы, меншікті функция, тіркескен функция.

Keywords: the operator of Sturm-Liuvillay, own the functions, attached functions.

Рассмотрим в пространстве $H = L^2(0,1)$ оператор Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y''(x);\quad x \in (0,1) \tag{1}$$

$$U_i[y] = a_{i1}y(0) + a_{i2}y'(0) + a_{i3}y(1) + a_{i4}y'(1) = 0\quad (i = 1,2) \tag{2}$$

с двумя (i = 1,2) линейно независимыми краевыми условиями. Это условие означает, что из шести детерминантов $\Delta_{ij} = a_{1i}a_{2j} - a_{2i}a_{1j}$ $(i,j = 1,2,3,4)$ содержащихся в матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

не все равны нулю.

Задача на собственные значения для оператора (1)-(2) имеет вид

$$Ly = \lambda y, \tag{3}$$

$$U_i[y] = 0\quad (i = 1,2). \tag{4}$$

Собственные значения этой задачи совпадают с квадратами корней ее характеристической функций [1, с. 33]

$$\Delta(\lambda) = \Delta_{12} + \Delta_{34} + \Delta_{13}\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + (\Delta_{14} + \Delta_{32})\cos\sqrt{\lambda} - \Delta_{42}\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}, \qquad (5)$$

где $\Delta_{ij} = a_{1i}a_{2j} - a_{2i}a_{1j}$ $(i,j = 1,2,3,4)$ миноры матрицы A.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Предположим, что характеристическая функция задачи (3)-(4), т.е. функция (5), имеет счетное множество кратных нулей. Спрашивается, какой вид имеет граничные условия такого оператора и, в частности, образуют ли базис Рисса собственные и присоединенные функций такой задачи. Мы получили утвердительный ответ, на этот вопрос, с помощью теоремы Ильина В.А [2, с. 1049-1050] и схемы Ионкина Н.И [3, с. 297]. Оснавная идея настоящей работы состойт в следующем. Рассматриваемые нами операторы подобны к некоторым модельным операторам Штурма-Лиувилля, базисность собственных и присоединенных функций которых легко устанавливается с помощью теоремы Ильина В.А. [2, с. 1049-1050].

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

ЛЕММА 1.

(а) Если $a \times d \neq 0$, то уравнение

$$\Delta(\lambda) = a + \left(\frac{b}{\sqrt{\lambda}} + d\sqrt{\lambda}\right)\sin\sqrt{\lambda} + c \times \cos\sqrt{\lambda} = 0, \qquad (6)$$

где a, b, c. d – const, может иметь не более четырех кратных нулей, отличных от нуля;

(б) Если $a = 0$, $d \neq 0$, то уравнение (6) может иметь не более двух кратных нулей, отличных от нуля;

(в) Если $d = 0$, $b \neq 0$, то уравнение (6) может иметь не более двухкратных нулей.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $d = 0, b \neq 0, c^2(a^2 - c^2) = 0,$ то уравнение (6) может иметь не более одного кратного нуля.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $d = 0, 2bc(a^2 - c^2) - 2b^2c^2 + a^2b^2 = 0,$

$b^2(a^2 - c^2) - b^4 - 2b^3c \neq 0,$

то уравнение (6) не иметь кратных нулей, например, при

ЛЕММА 2. Если $c \neq 0$ и функция

$$\Delta(\lambda) = a + \frac{b}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda} + c \times \cos\sqrt{\lambda},$$

где a, b, c – const, имеет более двух кратных нулей, то $b = 0$, $a^2 = c^2$.

ЛЕММА 3. Если характеристическая функция (5), краевой задачи (3)-(4) имеет счетное множество кратных нулей, то краевые условия (4) не усиленно регулярны [4, с. 71].

ЛЕММА 4. Если характеристическая функция (5), краевой задачи (3)-(4) имеет счетное количество кратных нулей, то оператор Штурма-Лиувилля, соответствующий этой краевой задаче, принимает один из следующих видов

$$L_1(k)y = -y''(x); \quad x \in (0,1),$$

$$\begin{cases} y'(0) + y'(1) = 0, & k \in \mathbb{C}, k \neq -1 \\ y(0) + k\,y(1) = 0; & \end{cases}$$

$$L_2(k)y = -y''(x); \quad x \in (0,1)$$

$$k\,y'(0) - y'(1) = 0, \qquad k \in \mathbb{C}, k \neq -1$$

$$y(0) - y(1) = 0$$

или им сопряженных, где k принадлежит к расширенной комплексной плоскости.

ЛЕММА 5. Если $k^2 \neq 1$, то имеет место формулы

а) $L_1(k) = P^{-1}(k)L_1(0)P(k), \qquad P(k)y(x) = y(x) + ky(1-x);$

б) $L_2(k) = Q^{-1}(k)L_2(\infty)Q(k); \quad Q(k)y(x) = ky(x) + y(1-x).$

3.ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

ТЕОРЕМА 1. Если $k \neq -1$, то собственные и присоединенные функций оператора

$$L_2(k)y = -y''(x); \quad x \in (0,1)$$

$$k\,y'(0) - y'(1) = 0, \qquad k \in \mathbb{C}$$

$$y(0) - y(1) = 0$$

образуют базис Рисса пространстве $L^2(0,1)$.

ТЕОРЕМА 2. Система собственных и присоединенных функций оператора Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y''(x); \quad x \in (0,1)$$

$$y(0) = 0,$$

$$y'(0) + y'(1) = 0$$

образует базис Рисса в пространстве $L^2(0,1)$.

Эта теорема является следствием теоремы Ильина В.А, и теоремы Ионкина Н.И.

ТЕОРЕМА 3. Система собственных и присоединенных функций оператора Штурма-Лиувилля

$$L_1(k)y = -y''(x);\ \ x \in (0,1)$$

$$y'(0) + y'(1) = 0, \qquad k \in \not\subset, k \neq -1$$

$$y(0) + k\, y(1) = 0$$

образует базис Рисса в пространстве $L^2(0,1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1 Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1977. – 332 с.

2 Ильин В.А. О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций дифференциального оператора второго порядка // ДАН СССР. – Т. 273, № 5. – С. 1048-1053.

3 Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теорий теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. – 1977. – Т. 13, № 2. – С. 294-304.

4 Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.

REFERENCES

1 Marchenko V.A. Operatory Sturma-Liuvillya I ih prilozhenya. Kiev: Nauka dumka, 1977. 332 (in Russ.).

2 Il’in V.A. O bezuslovnoi bazisnosti na zamknutom interval system sobstvennyh I prisoedinennyh funkcii differencial’nogo operatora vtorogo poryadka // DAN SSSR, T. 273, № 5, 1048-1053 (in Russ.).

3 Ionkin N.I. Reshenie odnoi kraevoi zadachi teorii teploprovodnosti s neklassicheskim kraevym usloviem // Differencial’nye uravneniya, 1977, T. 13. №2, 294-304 (in Russ.).

4 Naimark M.A. Lineinye differencial’nye operatory. M.: Nauka, 1969.-528 (in Russ.).

Резюме

А. Ш. Шалданбаев, С. М. Шаленова

(М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан Республикасы)

СПЕКТРІ ЕСЕЛІК ШТУРМ-ЛИУВИЛЛ ОПЕРАТОРЫНЫҢ МЕНШІКТІ

ЖӘНЕ ТІРКЕСКЕН ФУНКЦИЯЛАРЫНЫҢ БАЗИСТІГІ ТУРАЛЫ

Бұл еңбекте, В. А. Ильиннің белгісі бойынша, спектрі еселік Штурм-Лиувилл операторының меншікті және тіркескен функцияларының $L^2(0,1)$ кеңістігінде базис құрайтыны дәлелденді.

Кілт сөздер: Штурма-Лиувилл операторы, меншікті функция, тіркескен функция.

Summary

A. Sh. Shaldanbaev, S. M. Shalenova

(M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Republic of Kazakhstan)

ON THE BASIS PROPERTY AND ASSOCIATED FUNCTIONS

OF THE STURM-LIOUVILLE PROBLEM WITH A MULTIPLE SPECTRUM

In the true work, by means of an attribute of Century of A.Ilyin, it is installed bases own and attached vectors of the operator of Sturm-Liouville with a multiple spectrum.

Keywords: the operator of Sturm-Liuvillay, own the functions, attached functions.

Поступила 22.04.2013 г.